

Prof. A.F.Guimarães

Física 3 – Questões 8

Questão 1

Numa região do espaço existe um campo vetorial B constante. (a) Determine o fluxo de B através da base de um cilindro de raio R cujo eixo de simetria é paralelo à direção do campo. (b) Ache o fluxo total de B através da superfície fechada externa do cilindro.

Resolução:

a) Considere a figura abaixo.

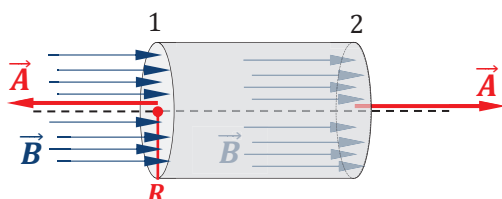


Figura 1.1

O fluxo na base 1, será:

$$\Phi_{B1} = BA \cos \pi \therefore \Phi_{B1} = -B\pi R^2 \quad (1.1)$$

b) O fluxo total será:

$$\Phi_B = \Phi_{B1} + \Phi_{B2} = -B\pi R^2 + B\pi R^2 = 0 \quad (1.2)$$

Lembrando que o fluxo na área lateral é nulo.

Questão 2

Um elétron entre num campo magnético com uma energia de 5 keV. Suponha que este campo magnético seja constante ao longo de uma pequena região da superfície terrestre (onde o elétron se encontra); considere o módulo deste campo dado por $B = 0,5 \text{ Gauss}$. Sabendo que $1 \text{ Gauss} = 10^{-4} \text{ T}$ e que a direção da velocidade do elétron (quando ele entre no campo) é ortogonal ao campo, calcule: (a) a aceleração do elétron, (b) a distância entre a direção da velocidade inicial e a posição em que se encontra

o elétron 30 segundos após ele entrar no campo. Despreze o peso do elétron.

Resolução:

a) Considere a figura abaixo.

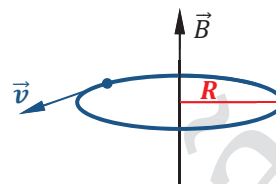


Figura 2.1

Como a força resultante é uma força centrípeta e por sua vez é uma força de natureza magnética, teremos:

$$F_B = F_{cp} \Rightarrow qvB = ma_{cp} \\ \therefore a_{cp} = \frac{qvB}{m} \quad (2.1)$$

Para um elétron com a energia dada, temos:

$$K = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v = \left(\frac{2K}{m} \right)^{\frac{1}{2}} \\ \therefore v \cong 4,19 \cdot 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad (2.2)$$

Utilizando o resultado de (2.2) em (2.1), teremos:

$$a_{cp} = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 4,19 \cdot 10^7 \cdot 0,5 \cdot 10^{-4}}{9,1 \cdot 10^{-31}} \\ \therefore a_{cp} \cong 3,68 \cdot 10^{14} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \quad (2.3)$$

b) O período do movimento do elétron será:

$$T = \frac{2\pi m}{qB} \Rightarrow T = \frac{2\pi \cdot 9,1 \cdot 10^{-31}}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 0,5 \cdot 10^{-4}} \\ \therefore T \cong 7,15 \cdot 10^{-7} \text{ s} \quad (2.4)$$

Uma volta corresponde ao período dado por (2.4). Assim, para 30 segundos, teremos

aproximadamente $41,96 \cdot 10^6$ voltas. Para efeitos práticos, o elétron se encontra na mesma posição que se encontrava no início. Porém, percorreu uma distância de aproximadamente $1,26 \cdot 10^9$ m.

Questão 3

Uma partícula possui carga $q = 0,5 \text{ pC}$ e velocidade dada por: $\vec{v} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$, onde os componentes da velocidade são dados em $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$. A partícula entra num campo magnético que possui módulo constante e que é caracterizado por $\vec{B} = B_x\vec{i} + B_y\vec{j}$, onde $B_x = 0,05 \text{ Gauss}$ e $B_y = 0,10 \text{ Gauss}$. Determine: (a) a força magnética sobre a partícula (módulo, direção e sentido), (b) o ângulo entre a velocidade inicial e o vetor B .

Resolução:

a) A força magnética é dada por:

$$\vec{F}_B = q\vec{v} \wedge \vec{B} = q \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (3.1)$$

Substituindo os valores em (3.1), teremos:

$$\vec{F}_B = 0,5 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-4} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 0 \\ 0,05 & 0,10 & 0 \end{vmatrix} \\ \therefore \vec{F}_B = 1,75 \cdot 10^{-17} \text{ N } \vec{k} \quad (3.2)$$

b) O módulo da força magnética é dado por:

$$F_B = qvB \sin\theta \quad (3.3)$$

Para a velocidade, temos como módulo:

$$v = (2^2 + 3^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{13} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad (3.4)$$

Para o vetor indução magnética (campo magnético), temos:

$$B = (0,05^2 + 0,10^2)^{\frac{1}{2}} = 1,1 \cdot 10^{-5} \text{ T} \quad (3.5)$$

Agora, utilizando (3.2), (3.4), (3.5) em (3.3), teremos:

$$1,75 \cdot 10^{-17} = 0,5 \cdot 10^{-12} \sqrt{13} \cdot 1,1 \cdot 10^{-5} \sin\theta \\ \therefore \sin\theta \cong 0,88 \Rightarrow \theta \cong 62^\circ \quad (3.6)$$

Questão 4

Uma carga $q = 800 \text{ pC}$ entra num campo magnético uniforme com velocidade $\vec{v} = 200\vec{i} + 400\vec{j} - 300\vec{k}$, onde os componentes da velocidade são dados em $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$. A indução magnética é dada por: $\vec{B} = 0,02\vec{i} - 0,04\vec{j}$, onde os componentes de B são dados em T . Determine: (a) os componentes da força (em N), (b) o módulo da força magnética F .

Resolução:

a) Utilizando a equação (3.1), teremos:

$$\vec{F}_B = 800 \cdot 10^{-13} \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -3 \\ 2 & -40 & 0 \end{vmatrix} \\ \therefore \vec{F}_B = -(9,6\vec{i} + 0,48\vec{j} + 7,04\vec{k}) \cdot 10^{-9} \text{ N} \quad (4.1)$$

b) O módulo da força:

$$|\vec{F}_B| = 10^{-9} \sqrt{9,6^2 + 0,48^2 + 7,04^2} \\ \therefore |\vec{F}_B| \cong 1,2 \cdot 10^{-8} \text{ N} \quad (4.2)$$

Questão 5

Um feixe de elétrons de energia cinética K é produzido por um acelerador. A uma distância d da janela de saída do acelerador, e perpendicular à direção do feixe, coloca-se uma placa metálica. Mostre que podemos impedir os elétrons de atingir a placa com o auxílio de um campo magnético B que satisfaça à condição

$$B \geq \left(\frac{2mK}{e^2 d^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

onde m e e são, respectivamente, a massa e a carga do elétron. Como deve estar orientado o vetor B ?

Resolução:

Considere a figura abaixo.

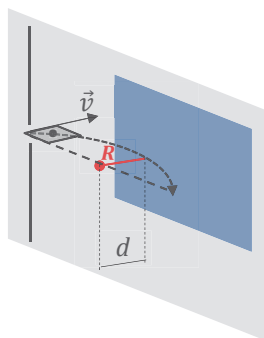


Figura 5.1

Como se pode observar da figura 5.1, o raio (R) da trajetória do elétron deve ser menor ou igual à distância d . Assim, temos:

$$R \leq d \quad (5.1)$$

Em que:

$$R = \frac{mv}{eB} \quad (5.2)$$

A velocidade do elétron será dada em função da energia cinética. Assim, teremos:

$$v = \left(\frac{2K}{m} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.3)$$

Substituindo (5.3) em (5.2), teremos:

$$R = \frac{m}{eB} \left(\frac{2K}{m} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.4)$$

Agora, utilizando (5.1), teremos:

$$B \geq \frac{m}{e \cdot d} \left(\frac{2K}{m} \right)^{\frac{1}{2}} \therefore B \geq \left(\frac{2Km}{e^2 d^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.5)$$

Para o caso da figura 5.1, o vetor indução magnética deve ser perpendicular ao vetor velocidade (na vertical) e apontando para baixo.

No entanto, o vetor indução magnética pode apontar para cima, porém o elétron efetuará a curva no sentido contrário ao que foi sugerido pela figura 5.1. Pode-se considerar o vetor indução magnética na direção horizontal, apontando, por exemplo, para a direita. Nesse caso o elétron efetuará uma curva ascendente. Caso o vetor indução aponte para a esquerda, o elétron efetuará uma curva para baixo. De forma resumida, qualquer sentido que o vetor indução magnética aponte, desde que seja perpendicular ao vetor velocidade, a condição imposta por (5.5) seria satisfeita.

Questão 6

Um elétron entra num campo magnético uniforme com uma velocidade (em $m \cdot s^{-1}$) dada por: $\vec{v} = 4 \cdot 10^4 i - 2,5 \cdot 10^5 j$. Ele sofre a ação de uma força magnética dada por: $\vec{F} = F_x i + F_y j$, onde $F_x = 2,5 \cdot 10^{-12} N$ e $F_y = 4 \cdot 10^{-13} N$. O ângulo entre a velocidade inicial e o vetor B é igual a 30° . Calcule o módulo do vetor B . Determine o trabalho realizado por esta força magnética quando o elétron se desloca de $2,0 \text{ cm}$ no interior deste campo.

Resolução:

Previamente vamos determinar os módulos da velocidade e da força. Assim, teremos:

$$v = \sqrt{(4 \cdot 10^4)^2 + (2,5 \cdot 10^5)^2} \cong 2,5 \cdot 10^5 m \cdot s^{-1} \quad (6.1)$$

$$F = \sqrt{(2,5 \cdot 10^{-12})^2 + (4 \cdot 10^{-13})^2} \cong 2,5 \cdot 10^{-12} N \quad (6.2)$$

Agora, utilizando a equação (3.3), teremos:

$$2,5 \cdot 10^{-12} = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 2,5 \cdot 10^5 \cdot B \cdot 0,5 \\ \therefore B = 125 T \quad (6.3)$$

A força magnética não realiza trabalho, até porque a velocidade não varia em módulo e também a referida força é perpendicular ao vetor velocidade da partícula.

Questão 7

Um fio de metal de massa m pode deslizar sem atrito sobre dois trilhos separados por uma distância d (veja figura 7.1). Os trilhos, colocados horizontalmente num campo magnético vertical B , são percorridos por uma corrente constante i , mantida pelo gerador G . Calcule a velocidade (em módulo e direção) do fio em função do tempo, supondo que ele esteja em repouso no instante $t = 0$.

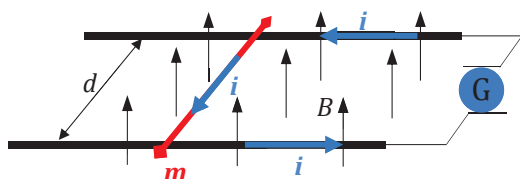


Figura 7.1

Resolução:

De acordo com a regra da mão direita para o produto vetorial, a força que atua no fio de metal aponta na direção horizontal (paralelamente aos trilhos) e se orienta para a esquerda. O módulo da força é dado por:

$$F = i \cdot l \cdot B \cdot \sin \theta \quad (7.1)$$

Em que θ é o ângulo entre l e B (no caso $\frac{\pi}{2}$ rad). Como essa é a única força que atua no fio, teremos:

$$m \frac{dv}{dt} = i \cdot d \cdot B \therefore v = \frac{i \cdot d \cdot B}{m} t \quad (7.2)$$

Questão 8

Considere a questão anterior. Suponha que o coeficiente de atrito cinético entre o fio e o trilho seja igual a μ_c . Suponha que a força magnética seja maior do que a força de atrito; obtenha uma expressão para a corrente i necessária para produzir uma aceleração a do fio.

Resolução:

Levando em consideração que a força magnética é maior do que a força de atrito, então teremos:

$$m \cdot a = idB - \mu_c mg$$

$$\therefore i = \frac{m(a + \mu_c g)}{Bd} \quad (8.1)$$

Questão 9

Um fio de massa m , dobrado na forma de uma letra U de largura l , tem seus extremos mergulhados, em dois vasos contendo mercúrio, como mostra a figura 9.1. O fio está submetido à ação de um campo uniforme B . Se um impulso de corrente, que transporta uma carga $q = \int i dt$, percorre o fio, este salta bruscamente para cima. Calcule a partir da altura máxima h atingida pelo fio, o valor da carga total q , supondo que o tempo de duração da corrente é muito menor do que o tempo que leva o fio para subir e descer. Resolva inicialmente o problema literalmente; a seguir obtenha o valor de q usando os seguintes dados: $B = 0,05 \text{ T}$; $m = 10 \text{ g}$; $l = 15 \text{ cm}$ e $h = 2 \text{ m}$.

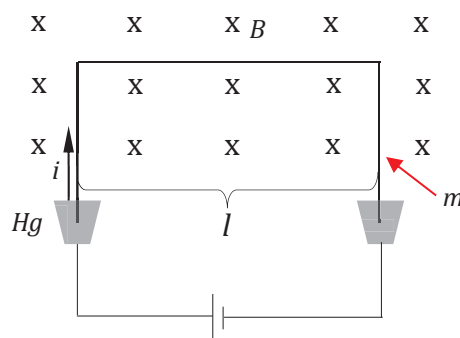


Figura 9.1

Resolução:

No instante inicial, a força resultante no fio atua pra cima é dada por:

$$F_R = ilB - mg \quad (9.1)$$

Agora, determinando o impulso da força resultante teremos:

$$\int_0^t F_R dt = Bl \int_0^t i dt - mg \int_0^t dt$$

$$\therefore v = \frac{Blq}{m} - mgt$$

(9.2)

Agora, levando em consideração que o tempo de duração da corrente é muito pequeno, teremos:

$$\lim_{t \rightarrow 0} v = \frac{Blq}{m}$$

(9.3)

A equação (9.3) fornece a velocidade inicial ascendente. Agora, utilizando a conservação da energia mecânica, teremos:

$$K = U \Rightarrow \frac{m}{2} \left(\frac{Blq}{m} \right)^2 = mgh$$

$$\therefore q = \frac{m\sqrt{2gh}}{Bl}$$

(9.4)

Utilizando os dados numéricos e a equação (9.4), teremos:

$$q = \frac{10^{-2} \sqrt{2 \cdot 9,8 \cdot 2}}{0,05 \cdot 0,15} \cong 8,35 \text{ C}$$

(9.5)

Questão 10

Considere a figura 10.1. Obtenha a expressão do módulo do torque que atua sobre a bobina indicada. Use letras para designar as grandezas que você achar que sejam relevantes para a solução literal deste problema.

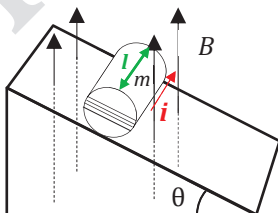


Figura 10.1

Resolução:

Levando em consideração que a bobina se encontra paralela ao plano inclinado, o torque será:

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \wedge \vec{B} \Rightarrow \tau = NiAB \sin \theta$$

(10.1)

Em que $\mu = NiA$ é o momento de dipolo magnético e $A = 2Rl$ é a área delimitada pela bobina.

Questão 11

A figura 10.1 mostra um cilindro de madeira de massa m igual a $0,25 \text{ kg}$, raio R e comprimento l igual a $0,1 \text{ m}$, ao longo do qual foram dadas 15 voltas com um fio condutor, de modo a fazer uma bobina retangular cujo plano contém o eixo do cilindro. O cilindro é colocado sobre um plano inclinado de um ângulo θ em relação à horizontal, de modo que o plano da bobina seja paralelo a esse plano. Calcule o menor valor da corrente i capaz de impedir o cilindro de rolar, na presença de um campo magnético vertical igual a $0,8 \text{ T}$.

Resolução:

O torque oferecido pelo campo magnético está orientado ao longo do eixo do cilindro e apontando para fora do plano da página. Já o torque oferecido pelo componente tangencial do peso, com relação ao ponto de contato do cilindro com o plano inclinado, está orientado ao longo do eixo do cilindro e aponta para dentro do plano da página. Assim, teremos:

$$\tau_B = \tau_{Px} \Rightarrow 2RlNiB \sin \theta = mgl \sin \theta$$

$$\therefore i = \frac{mg}{2lNB}$$

(11.1)

Substituindo os dados numéricos:

$$i = \frac{0,25 \cdot 9,8}{2 \cdot 0,1 \cdot 15 \cdot 0,8} \cong 1,02 \text{ A}$$

(11.2)

Questão 12

(a) Mostre que a relação entre o campo elétrico de Hall E_H e o campo elétrico E , responsável pela corrente, é

$$\frac{E_H}{E} = \frac{B}{ne\rho},$$

(b) Qual é o ângulo entre E_H e E ? (c) Calcule o valor dessa relação para a situação de uma tira de cobre de 2,0 cm de largura e 1,0 mm de espessura colocada num campo magnético $B = 1,5 \text{ T}$ percorrida por uma corrente de 200 A conforme mostra a figura 12.1.

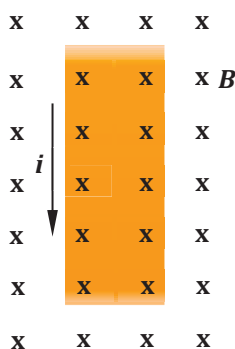


Figura 12.1

Resolução:

a) A velocidade de arraste dos portadores de carga é dada por:

$$v = \frac{j}{ne} \quad (12.1)$$

Em que $j = \frac{E}{\rho}$ é a densidade de corrente elétrica. Aqui E é o campo elétrico responsável pela corrente e ρ é a resistividade do material que compõe o condutor. Uma vez estabelecido o campo elétrico Hall, teremos:

$$F_B = F_H \quad (12.2)$$

Pois surge uma força elétrica que se opõe à força magnética. Assim utilizando (12.1) em (12.2), teremos:

$$\begin{aligned} evB &= eE_H \Rightarrow \frac{E}{ne\rho} B = E_H \\ \therefore \frac{E_H}{E} &= \frac{B}{ne\rho} \end{aligned} \quad (12.3)$$

b) Como a velocidade de arraste é transversal ao campo elétrico de Hall, o campo responsável pela corrente também será.

c) Substituído os dados numéricos em (12.3) e lembrando que a densidade de portadores livres para o cobre vale $11 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$, teremos:

$$\begin{aligned} \frac{E_H}{E} &= \frac{1,5}{11 \cdot 10^{28} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 1,7 \cdot 10^{-8}} \\ \therefore \frac{E_H}{E} &\cong 5 \cdot 10^{-3} \end{aligned} \quad (12.4)$$

Obs.: A resistividade do cobre; $\rho = 1,7 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot m$.

Questão 13

Um próton, um dêuteron e uma partícula α penetram, com a mesma energia cinética, num campo magnético uniforme B , perpendicular às suas velocidades. Compare os valores dos raios das suas trajetórias circulares.

Resolução:

Seja K a energia cinética das referidas partículas e m a massa do próton. Assim, as velocidades do próton, do dêuteron e da partícula α valem respectivamente:

$$v_p = \left(\frac{2K}{m} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (13.1)$$

$$v_D = \left(\frac{K}{m} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (13.2)$$

$$v_\alpha = \left(\frac{K}{2m} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (13.3)$$

Utilizando a expressão do raio da trajetória, e as equações (13.1), (13.2) e (13.3), teremos para o próton, o dêuteron e para a partícula α :

$$R_p = \frac{m}{eB} \left(\frac{2K}{m} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (13.4)$$

$$R_D = \frac{m}{eB} \left(\frac{4K}{m} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (13.5)$$

$$R_\alpha = \frac{m}{eB} \left(\frac{2K}{m} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (13.6)$$

Das equações (13.4) à (13.6), podemos concluir:

$$R_p = R_\alpha < R_D \quad (13.7)$$

Obs.: Aqui foi considerado que a massa do dêuteron é $2m$ e a massa da partícula α vale $4m$.

Questão 14

Espectrômetro de massa. A figura 14.1 mostra um esquema do aparelho utilizado por Dempster na medida da massa dos íons. Um íon de massa M e carga $+q$ é produzido, praticamente em repouso, por meio de uma descarga através de um gás, realizada na fonte S . O íon é, então, acelerado por uma diferença de potencial V , penetrando, depois, num campo magnético B . No interior do campo o íon descreve uma órbita semicircular, terminando por atingir uma placa fotográfica onde deixa uma imagem situada a uma distância x do ponto de entrada. Mostre que a massa do íon é dada por:

$$M = \frac{B^2 q}{8V} \cdot x^2.$$

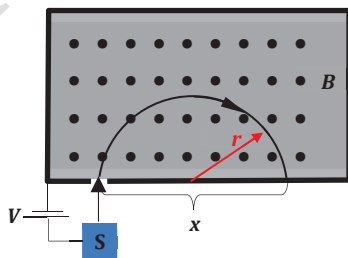


Figura 14.1

Resolução:

Previamente determinamos a velocidade da partícula por meio do trabalho realizado pela diferença de potencial V . Assim,

$$W = \Delta K \Rightarrow qV = \frac{mv^2}{2}$$

$$\therefore v = \left(\frac{2qV}{m} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (14.1)$$

A distância x é duas vezes o raio da trajetória da partícula. Assim, teremos:

$$x = 2r \Rightarrow x = \frac{2mv}{qB} \quad (14.2)$$

Substituindo o resultado de (14.1) em (14.2), teremos:

$$x = \frac{2m}{qB} \left(\frac{2qV}{m} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore m = \frac{qB^2 x^2}{8V} \quad (14.3)$$

Questão 15

Um pósitron de 4 keV , penetra num campo magnético uniforme de $0,10 \text{ T}$ com sua velocidade fazendo um ângulo de 80° com vetor B . Procure convencer-se de que a trajetória do pósitron será uma hélice com eixo na direção de B . Calcule o período de rotação do pósitron, o passo p e o raio r da hélice (veja a figura 15.1).

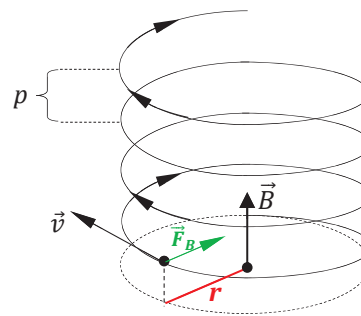


Figura 15.1

Resolução:

O pósitron possui uma velocidade tal que suas componentes serão, respectivamente, paralela e perpendicular ao vetor indução magnética. A componente paralela será responsável pelo passo p . E a componente perpendicular será responsável pelo giro do pósitron segundo a trajetória circular de raio r .

Sejam as componentes paralela e perpendicular dadas por:

$$v_{\parallel} = v \cos 80^{\circ} \quad (15.1)$$

$$v_{\perp} = v \sin 80^{\circ} \quad (15.2)$$

Em que $v = \left(\frac{2K}{m}\right)^{\frac{1}{2}}$. Utilizando a massa do pósitron ($m = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$), teremos para a velocidade: $v = 3,75 \cdot 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Logo, substituindo em (15.1) e (15.2), teremos:

$$v_{\parallel} \cong 6,4 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \text{ e } v_{\perp} \cong 3,68 \cdot 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad (15.3)$$

Em que $\sin 80^{\circ} = 0,98$ e $\cos 80^{\circ} = 0,17$. O período do movimento do pósitron é dado por:

$$T = \frac{2\pi m}{eB} \cong 3,58 \cdot 10^{-10} \text{ s} \quad (15.4)$$

Em que $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$. Utilizando o primeiro resultado de (15.3) e o resultado de (15.4), teremos para o passo p :

$$p = v_{\parallel} T \cong 2,3 \cdot 10^{-3} \text{ m} \quad (15.5)$$

Utilizando o segundo resultado de (15.3), teremos para o raio da hélice:

$$r = \frac{mv_{\perp}}{eB} \cong 2,1 \cdot 10^{-3} \text{ m} \quad (15.6)$$

Questão 16

Duas espécies de átomos uma vez ionizados, de mesma carga q e cujas massas diferem de uma pequena quantidade ΔM , são introduzidos no espectrômetro de massa descrito na questão 14. (a) Calcule a diferença de massa em termos de V , q , M (de qualquer um deles), B e da distância Δx entre as placas manchas na placa fotográfica. (b) Calcule Δx no caso de um feixe de átomos de cloro, uma vez ionizados, com massas de 35 e 37 u , supondo que $V = 7,3 \cdot 10^3 \text{ V}$ e $B = 0,50 \text{ T}$. ($1,00 \text{ u} = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$).

Resolução:

a) De (14.3), temos:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dm} &= \frac{2}{B} \left(\frac{2V}{q}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2\sqrt{m}} \\ \therefore \frac{\Delta m}{\sqrt{m}} &\cong B \left(\frac{q}{2V}\right)^{\frac{1}{2}} \Delta x \end{aligned} \quad (16.1)$$

b) Utilizando os dados numéricos em (16.1), teremos:

$$\begin{aligned} \frac{3,34 \cdot 10^{-27}}{\sqrt{35 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27}}} &= 0,5 \cdot \left(\frac{1,6 \cdot 10^{-19}}{2 \cdot 7,3 \cdot 10^3}\right)^{\frac{1}{2}} \Delta x \\ \therefore \Delta x &\cong 0,00834 \text{ m} \end{aligned} \quad (16.2)$$

Questão 17

Efeito Zeeman. Na teoria de Bohr para o átomo de hidrogênio, supõe-se que o elétron percorra uma órbita circular de raio r em torno do próton. Suponha que este átomo seja colocado num campo magnético com o plano da órbita perpendicular ao campo B . (a) Se o movimento do elétron (visto por um observador que olha acompanhando o sentido do vetor B) for realizado no sentido horário, haverá um aumento ou uma diminuição na frequência angular do percurso? (b) Que acontecerá se o elétron estiver girando no sentido anti-horário? Suponha que o raio da órbita não varia. (Sugestão: A força centrípeta é agora

devida em parte ao campo elétrico (F_E) e em parte ao campo magnético (F_B)).

Resolução:

Sem o campo magnético, a resultante centrípeta é elétrica. Assim, podemos escrever:

$$F_{cp} = F_E$$

$$m \cdot \frac{v^2}{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{R^2}; v = 2\pi R\nu$$

$$\therefore \nu = \frac{e}{4\pi} \cdot \sqrt{\frac{1}{m\pi\epsilon_0 R^3}}$$

(17.1)

Em que ν é a frequência, m a massa do elétron e R o raio da trajetória. O resultado de (17.1) fornece a frequência do movimento do elétron na ausência de campo magnético.

a) Nas condições imposta, temos:

$$F'_{cp} = F_E + F_B$$

(17.2)

Nesse caso, a força centrípeta aumenta de valor, mantendo o raio constante. Isto significa que a velocidade do elétron aumentou e esse aumento foi devido exatamente ao aumento da frequência.

b) Para esse caso teremos:

$$F''_{cp} = F_E - F_B$$

(17.3)

Já nesse caso, a força centrípeta diminui de valor, o que corresponde a uma velocidade menor devido a uma frequência menor.

Questão 18

Mostre que a variação na frequência de rotação do elétron da questão anterior, devida à presença do campo magnético, é dada aproximadamente por

$$\Delta\nu = \pm \frac{Be}{4\pi m}.$$

Estas variações de frequência foram observadas na prática por Zeeman em 1896. [Sugestão: Calcule a frequência de rotação com e sem o

campo magnético. Subtraia os resultados, tendo em mente o fato de que o efeito do campo magnético é pequeno, o que permite que se iguale a zero alguns (mas não todos) dos termos que contém o campo B .]

Resolução:

A frequência do movimento do elétron na ausência do campo magnético é dada por (17.1). Na presença dos dois campos teremos de (17.2) e (17.3):

$$F_{cpB} = F_E \pm F_B$$

(18.1)

Em que $F_{cpB} = \frac{mv_B^2}{R}$. Assim, teremos:

$$\frac{mv_B^2}{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{R^2} \pm ev_B B$$

(18.2)

Em que $v_B = 2\pi R\nu_B$ é a velocidade do elétron na presença dos dois campos e ν_B é a frequência na presença dos dois campos. A equação (18.2) se torna:

$$\nu_B^2 \mp \frac{eB}{2\pi m} \cdot \nu_B = \nu^2$$

(18.3)

Em que ν é dada por (17.1). Resolvendo (18.3) teremos:

$$\nu_B^2 \left(1 \mp \frac{eB}{2\pi m \nu_B} \right) = \nu^2$$

$$\nu_B \left(1 \mp \frac{eB}{2\pi m \nu_B} \right)^{\frac{1}{2}} = \nu$$

$$\nu_B \left[1 \mp \frac{1}{2} \cdot \frac{eB}{2\pi m \nu_B} \mp \dots \right] \cong \nu$$

(18.4)

Em (18.4) foi utilizado a seguinte expansão:

$$(1+x)^n \cong 1 + \frac{nx}{1} + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \dots$$

(18.5)

Em que foram desprezados os termos de ordem superior a 1. Assim, teremos para (18.4):

$$\nu_B \mp \frac{eB}{4\pi m} \cong \nu$$

(18.6)

Que conduz a:

$$\therefore \Delta\nu \cong \pm \frac{eB}{4\pi m}$$

(18.7)

Questão 19

O ciclotron da figura 19.1 era nominalmente ajustado para acelerar deuterons. (a) Se ele fosse usado para acelerar prótons, com a mesma frequência de oscilação empregada para o deuterons, com que energia os prótons poderiam ser produzidos? (b) Qual o valor necessário para o campo magnético? (c) Com que energia seriam produzidos os prótons se usássemos o mesmo valor da indução magnética empregada para os deuterons? (d) Qual seria o valor necessário para a frequência de oscilação? (e) Responda as mesmas perguntas para o caso de uma partícula α .

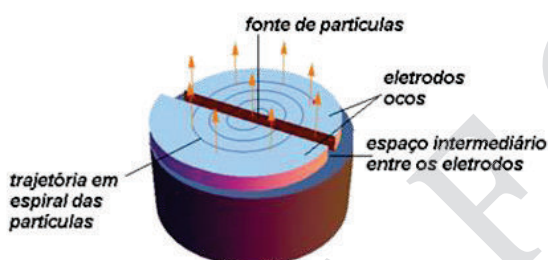


Figura 19.1

Resolução:

A frequência utilizada para acelerar deuterons é dada por:

$$\nu_D = \frac{eB}{2\pi m_D}$$

(19.1)

Para acelerar prótons, que possui metade da massa de um deuteron, deve-se ajustar uma nova indução magnética. Assim, a frequência para acelerar prótons será:

$$\nu_p = \frac{eB'}{2\pi m_p}$$

(19.2)

Em que B' é a nova indução magnética. Como as frequências devem ser iguais, temos de (19.1) e (19.2):

$$\frac{eB}{2\pi m_D} = \frac{eB'}{2\pi m_p} \therefore B' = \frac{B}{2}$$

(19.3)

A energia cinética da partícula na saída do ciclotron é dada por:

$$K = \frac{q^2 B^2 R^2}{2m}$$

(19.4)

Em que q é a carga da partícula, R o raio do ciclotron e m é a massa da partícula. Assim, para o deuteron, teremos:

$$K_D = \frac{e^2 B^2 R^2}{4m_p}$$

(19.5)

Em que $m_D = 2m_p$. Assim, utilizando o resultado de (19.3), teremos para o próton:

$$K_p = \frac{e^2 B^2 R^2}{8m_p}$$

(19.6)

Comparando (19.5) e (19.6), temos:

$$K_p = \frac{K_D}{2}$$

(19.7)

Os prótons teriam metade da energia dos deuterons, caso fosse ajustado o valor de metade da indução magnética (mantendo a frequência).

No entanto, se fosse mantida a mesma indução magnética que fora utilizada pelos deuterons (nesse caso a frequência deveria ser modificada), a energia dos prótons seria:

$$K'_p = \frac{e^2 B^2 R^2}{2m_p}$$

(19.8)

Comparando (19.5) e (19.8), temos:

$$K'_p = 2K_D \quad (19.9)$$

A frequência ajustada para os prótons seria:

$$\nu_p = \frac{eB}{2\pi m_p} = 2\nu_D \quad (19.10)$$

No que se refere à partícula α temos:

$$\frac{q_\alpha}{m_\alpha} = \frac{q_D}{m_D} = \frac{e}{2m_p} \quad (19.11)$$

Logo, a partícula α terá a mesma frequência do deuteron. Mas o dobro da energia.

Questão 20

Faça uma estimativa para a distância percorrida por um deuteron no ciclotron da figura 19.1, durante todo o processo de aceleração. Suponha que a diferença de potencial entre os “dês” é igual a 80000 V. Utilize os seguintes dados:

$$\nu_0 = 12 \times 10^6 \text{ Hz};$$

$$R = 21 \text{ pol} = 53,3 \text{ cm};$$

$$B = 1,6 \text{ T e } K = 17 \text{ MeV}.$$

Resolução:

Considerando que o deuteron parte do repouso, para o primeiro ciclo, a energia cinética vale:

$$K_1 = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 80000 = 1,28 \cdot 10^{-14} \text{ J} \quad (20.1)$$

Utilizando a relação (19.5), temos para o raio do primeiro ciclo:

$$R_1 \cong 3,6 \cdot 10^{-2} \text{ m} \quad (20.2)$$

A energia cinética final será dada pela soma das contribuições de energia para cada ciclo, ou seja:

$$K = n \cdot K_1 \quad (20.3)$$

Em que n é o número de ciclos. Assim, podemos concluir de (20.3) que o raio do último ciclo, que é o raio do “dê” do ciclotron será então:

$$R = \sqrt{n} R_1 \quad (20.4)$$

Utilizando (20.3) ou (20.4) podemos concluir:

$$n \cong 219 \quad (20.5)$$

O percurso total será então:

$$P = \pi R_1 (1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} \dots \sqrt{219}) \\ \therefore P \cong 245 \text{ m} \quad (20.6)$$

Questão 21

Um elétron sofre a ação simultânea de um campo elétrico e de um campo magnético. Tanto o campo elétrico quanto o magnético são constantes (no espaço e no tempo). O campo elétrico é dado por $\vec{E} = 2i - j$, onde os componentes do campo elétrico são dados em V/m. O vetor indução magnética é dado por $\vec{B} = 0,04i - 0,01j$, onde os componentes de B são dados em T. O elétron entra no campo com uma velocidade dada pela expressão $\vec{v} = 300i + 400j - 100k$, onde o módulo da velocidade é dado em metros por segundo. Calcule o módulo da força que atua sobre o elétron.

Resolução:

A força resultante sobre o elétron é dada por:

$$\vec{F} = -e\vec{E} - e\vec{v} \wedge \vec{B} \quad (21.1)$$

O produto vetorial da segunda parcela será:

$$-e\vec{v} \wedge \vec{B} = -1,6 \cdot 10^{-19} \begin{vmatrix} i & j & k \\ 300 & 400 & -100 \\ 0,04 & -0,01 & 0 \end{vmatrix} \\ = 1,6 \cdot 10^{-19} (i + 4j + 19k) \quad (21.2)$$

Utilizando o resultado de (21.2) em (21.1), teremos:

$$\vec{F} = 1,6 \cdot 10^{-19}(-2i + j + i + 4j + 19k)$$

$$\therefore \vec{F} = 1,6 \cdot 10^{-19}(-i + 5j + 19k)$$

(21.3)

Agora, calculando o módulo do resultado de (21.3), teremos:

$$F = 1,6 \cdot 10^{-19} \sqrt{1^2 + 5^2 + 19^2}$$

$$\therefore F \cong 3,15 \cdot 10^{-18} \text{ N}$$

(21.4)

Questão 22

Um elétron é acelerado por uma diferença de potencial de 1000 V, e orientado para a região existente entre duas placas paralelas separadas por 0,02 m, entre as quais existe uma diferença de potencial de 100 V. Se o elétron penetra, perpendicularmente à direção do campo elétrico existente entre as placas, qual o valor do campo magnético perpendicular a ambos (trajetória do elétron e campo elétrico) para que o elétron se desloque em linha reta?

Resolução:

Um elétron em uma ddp de 1000 V sofre uma aceleração. Assim, partindo do repouso, terá uma velocidade dada por:

$$W = \Delta K$$

$$eV = \frac{mv^2}{2}$$

$$9,11 \cdot 10^{-31} v^2 = 3,2 \cdot 10^{-19} \cdot 10^3$$

$$\therefore v \cong 18,7 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

(22.1)

O elétron penetra na região do campo magnético com a velocidade por (22.1). A condição para que o elétron não sofra deflexão, é dada por:

$$v = \frac{E}{B}$$

(22.2)

O campo elétrico entre as placas é dado por:

$$E = \frac{V}{d} = \frac{100}{0,02} = 5000 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

(22.3)

Utilizando (22.2) e (22.3), teremos:

$$B = \frac{5000}{18,7 \cdot 10^6} \cong 2,67 \cdot 10^{-4} \text{ T}$$

(22.4)

Questão 23

Uma partícula com carga igual a $2,15 \mu\text{C}$ e massa de $3,2 \cdot 10^{-11} \text{ kg}$ está, inicialmente, se deslocando no sentido +y com velocidade igual a $v_0 = 1,45 \cdot 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Ela a seguir entra em uma região onde existe um campo magnético uniforme que entra perpendicularmente no plano da página, como indicado na figura 23.1. O módulo do campo é igual a 0,420 T. A região se estende até uma distância igual a 25,0 cm ao longo da direção inicial do deslocamento; a 75,0 cm do ponto onde ela entrou no campo existe uma parede. O comprimento da região onde não existe campo é, portanto, igual a 50,0 cm. Quando a partícula carregada entra no campo magnético, ela segue uma trajetória curva com raio de curvatura R. Ela a seguir, deixa o campo magnético depois de um tempo t_1 tendo sido desviada de uma distância Δx_1 . A partícula então se desloca na região sem campo e atinge a parede depois de ser desviada de uma distância total Δx . A) Determine o raio R da parte curva da trajetória. B) Determine t_1 , o tempo durante o qual a partícula permanece no campo magnético. C) Determine Δx_1 , o desvio horizontal no ponto onde a partícula sai do campo. D) Determine Δx , o desvio horizontal total.

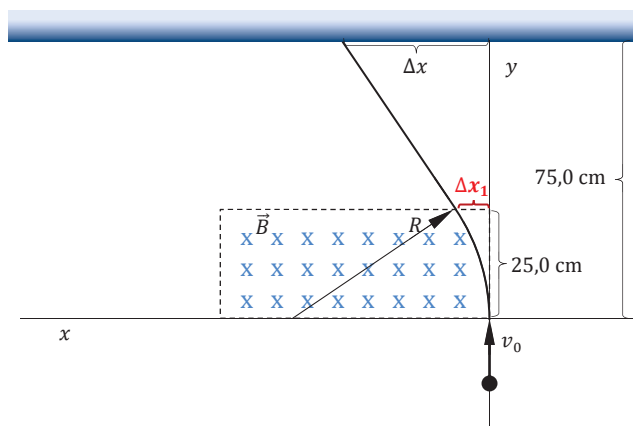


Figura 23.1

Resolução:

a) O raio da trajetória será:

$$R = \frac{3,20 \cdot 10^{-11} \cdot 1,45 \cdot 10^5}{2,15 \cdot 10^{-6} \cdot 0,420} = 5,14 \text{ m} \quad (23.1)$$

b) O intervalo de tempo Δt_1 será:

$$\Delta t_1 = \frac{y_B}{v_0} = \frac{0,25}{1,45 \cdot 10^5} = 1,72 \cdot 10^{-6} \text{ s} \quad (23.2)$$

c) O valor de Δx_1 será aproximadamente:

$$\Delta x_1 \cong \frac{a_{cp} t_1^2}{2} \quad (23.3)$$

Sendo que, utilizando (23.1):

$$a_{cp} = \frac{v_0^2}{R} = \frac{(1,45 \cdot 10^5)^2}{5,14} \cong 4,1 \cdot 10^9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \quad (23.4)$$

Agora, utilizando (23.2), (23.4) em (23.3), teremos:

$$\Delta x_1 \cong 6,1 \cdot 10^{-3} \text{ m} \quad (23.5)$$

d) Quando sai da região do campo magnético, a velocidade da partícula forma um ângulo com a direção de y dado por:

$$\text{sen } \theta = \frac{y_B}{R} \cong 0,05 \Rightarrow \cos \theta \cong 0,9987 \quad (23.6)$$

Assim, os componentes da velocidade serão:

$$v_x = v_0 \cdot \text{sen } \alpha = 7,3 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad (23.7)$$

$$v_y = v_0 \cdot \cos \theta \cong 1,448 \cdot 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad (23.8)$$

O intervalo de tempo que a partícula leva para atingir a parede, a partir da saída do campo magnético, utilizando (23.8), será:

$$\Delta t_2 = \frac{0,50}{v_y} = 3,45 \cdot 10^{-6} \text{ s} \quad (23.9)$$

Logo, o desvio Δx , utilizando (23.5), (23.7) e (23.9), será:

$$\begin{aligned} \Delta x &= \Delta x_1 + v_x \Delta t_2 \\ \therefore \Delta x &\cong 3,13 \cdot 10^{-2} \text{ m} \end{aligned} \quad (23.10)$$

Questão 24

A bomba eletromagnética. As forças magnéticas que atuam sobre fluidos condutores fornecem um modo conveniente para bombear o sangue sem prejudicar células que poderiam ser danificadas por uma bomba mecânica. Um tubo horizontal com seção reta retangular (largura w e altura h) é colocado ortogonalmente a um campo magnético B de tal modo que um comprimento l está imerso no campo figura 24.1. O tubo é preenchido com um fluido condutor e uma densidade de corrente J é mantida na terceira direção mutuamente perpendicular. A) Mostre que a diferença de pressão entre um ponto do líquido sobre o plano vertical que passa em $\vec{A}b$ e um ponto do líquido sobre outro plano vertical que passa em cd , para impedir o escoamento do fluido, é dada por $\Delta p = J l B$. B) Qual é a densidade de corrente necessária para fornecer uma diferença de pressão igual a $1,00 \text{ atm}$ entre esses dois pontos sabendo que $B = 2,20 \text{ T}$ e $l = 35,0 \text{ mm}$?

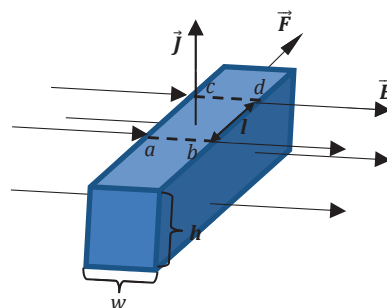


Figura 24.1

Resolução:

a) Podemos escrever a intensidade de corrente em função da área. Logo:

$$i = J \cdot l \cdot w \quad (24.1)$$

Assim, utilizando (24.1), temos para a intensidade da força sobre a corrente:

$$F = ihB = Jlw hB \quad (24.2)$$

Como a força advém de uma diferença de pressão, teremos:

$$\Delta p = \frac{F}{A} = \frac{Jlw hB}{wh} \\ \therefore \Delta p = J l B \quad (24.3)$$

Em que F é dado por (24.2) e $A = wh$.

b) Utilizando o resultado (24.3), teremos:

$$1,01 \cdot 10^5 = J \cdot 35 \cdot 10^{-3} \cdot 2,20 \\ \therefore J = 1,3 \cdot 10^6 \text{ A} \cdot \text{m}^{-2} \quad (24.4)$$

Em que $1 \text{ atm} = 1,01 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$.

Questão 25

Uma trajetória cicloidial. Uma partícula de massa m e carga positiva q parte do repouso na origem na figura 25.1. Existe um campo elétrico uniforme $\vec{E}$ no sentido $+y$ e um campo magnético uniforme $\vec{B}$ saindo da página. Demonstra-se em livros mais avançados que a trajetória descrita é uma cicloide, cujo raio de curvatura nos pontos do topo da curva é igual ao dobro da coordenada y desses pontos. A) Explique a razão desse tipo de trajetória e o motivo da repetição do movimento. B) Prove que a velocidade em qualquer ponto é dada por $\sqrt{2qEy/m}$. (Dica: Use a conservação da energia.) C) Aplicando a segunda lei de Newton no ponto do topo da trajetória e levando em conta a informação de que nesse ponto o raio de curvatura é igual a $2y$, prove que a velocidade nesse ponto é igual a $2E/B$.

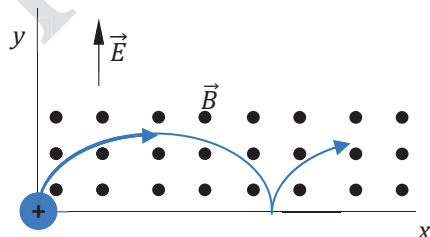


Figura 25.1

Resolução:

a) A partícula é acelerada pelo campo elétrico e à medida que sua velocidade aumenta, aumenta também a interação com o campo magnético. Tanto que sua velocidade sofre uma inversão de sentido com o campo elétrico. Agora a partícula entra em um movimento retardado até que atinja o repouso e assim, o movimento se repete.

b) A energia potencial elétrica é dada por:

$$U = qV \quad (25.1)$$

Em que q é a carga da partícula e V o potencial. Lembrando que o potencial está relacionado com o campo por:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V \quad (25.2)$$

Assim, o potencial assume a seguinte forma:

$$V = -Ey \quad (25.3)$$

Em que foi tomado $y = 0$ como referência para o potencial. Assim, a energia potencial elétrica pode ser escrita como:

$$U = -qEy \quad (25.4)$$

Utilizando a conservação de energia, teremos:

$$K = -U \\ \frac{mv^2}{2} = qEy \therefore v = \left(\frac{2qEy}{m} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (25.5)$$

c) Aplicando a 2ª lei de Newton para a partícula no topo da trajetória:

$$q(vB - E) = m \cdot \frac{v^2}{R} \quad (25.6)$$

Em que $R = 2y$. Utilizando o resultado de (25.5), teremos:

$$q(vB - E) = \frac{m}{2y} \cdot \frac{2qEy}{m}$$

$$vB - E = E$$

$$\therefore v = \frac{2E}{B}$$

(25.7)